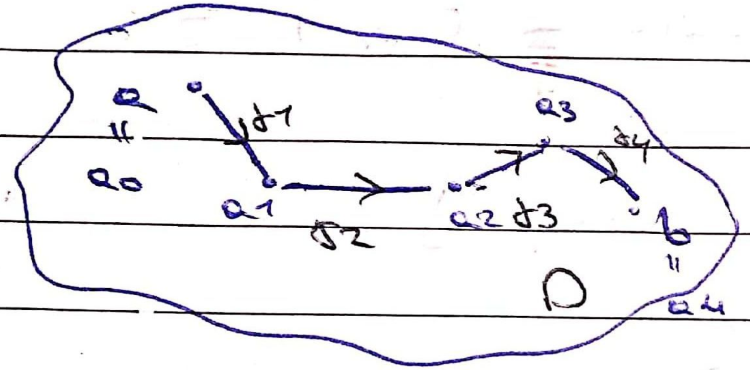
9/4/21

Σχετικά με την απόδειξη της (SOS) Πρότασης 3.3.1



γ_i: ευθύγραμμα τμήματα με

$\gamma_k(1) = \gamma_{k+1}(0)$, $k = 1, \ldots, n-1$

$\gamma_1(0) = a$, $\gamma_n(1) = b$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = (f\circ\cancel{\gamma_1})(1) - (f\circ\gamma_1)(0) + \cancel{(f\circ\gamma_2)(1)} - \underbrace{(f\circ\gamma_2)(0)}_{=(f\circ\gamma_1)(1)} + \cdots + (f\circ\gamma_n)(1) - \underbrace{(f\circ\gamma_n)(0)}_{=(f\circ\gamma_{n-1})(1)}$$

$$= \underbrace{(f\circ\gamma_n)(1)}_{f(b)} - \underbrace{(f\circ\gamma_1)(0)}_{f(a)} = f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f\circ\gamma_k)(1) - (f\circ\gamma_k)(0)$$

$$= \left(\mathrm{Re}(f\circ\gamma_k)(1) - \mathrm{Re}(f\circ\gamma_k)(0)\right)^{*} + i\left(\mathrm{Im}(f\circ\gamma_k)(1) - \mathrm{Im}(f\circ\gamma_k)(0)\right)^{*}$$

(*) ΘΘΑΠ $\int_0^1 (Re(f\circ\gamma_k))'(t)\,dt$ όπου $(Re(f\circ\gamma_k))'(t) = 0 =$
$= (Im(f\circ\gamma_k))'(t)$ $\forall t\in[0,1]$

(*) ΘΘΑΠ $\int_0^1 (Im(f\circ\gamma_k))'(t)\,dt$ $\forall k=1,\dots,n$

αφού $(f\circ\gamma_k)(t)' = 0$ για αυτά τα t και k

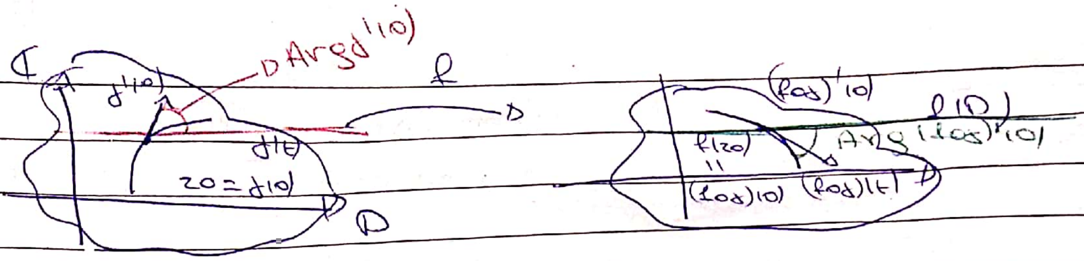
Λίγα λόγια για σύμμορφες απεικονίσεις (ουσιαστικά ορισμός και τι σημαίνει αυτός γεωμετρικά)

Υπενθύμιση: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Τότε $z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot \underbrace{e^{iArgz_1}}_{=e^{iargz_1}} + |z_2| \underbrace{e^{iArgz_2}}_{e^{iargz_2}}$
$= \underbrace{|z_1|\cdot|z_2|}_{|z_1\cdot z_2|\ (>0)} e^{i(Argz_1+Argz_2)} =$ $[e^{i2k\pi}=1\ \forall k\in\mathbb{Z}]$ $= Argz_1 + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
$= |z_1 z_2| e^{iArg(z_1\cdot z_2)}$
$\Rightarrow e^{iArg(z_1 z_2)} = e^{i(Argz_1+Argz_2)}$ $[\Leftrightarrow e^{iarg(z_1 z_2)} = e^{i(argz_1+argz_2)}]$
[χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα $Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2$] $[\Leftrightarrow arg(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2]$

Αντίστοιχα για $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ έχουμε:
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{iArgz_1}}{|z_2|e^{iArgz_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(Argz_1-Argz_2)}$
$= \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| e^{iArg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{e^{iArg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = e^{i(Argz_1-Argz_2)}}$

Έστω $\gamma:(a,b)\to\mathbb{C}$ κανονική $\Rightarrow \forall t\in(a,b)$
$\gamma'(t) = |\gamma'(t)|e^{iArg\gamma'(t)} \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \dfrac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{|\gamma(t+h)-\gamma(t)|} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}}{\left|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right|} =$
$= \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = e^{iArg\gamma'(t)}$

Έστω ότι $D\subset\mathbb{C}$ ανοικτό, $f:D\to\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0\in D$ με $\boxed{f'(z_0)\neq 0}$ και $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to D$, $\varepsilon>0$ κανονική με $\gamma(0)=z_0$.
Τότε $(f\circ\gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0) \neq 0$ (*)



(*) και (βλ. πολλαπλ.) $e^{i\mathrm{Arg}(f\circ\gamma)'(0)} = e^{i(\mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg}\gamma'(0))}$
δηλ. στο z_0 η f στρέφει τις καμπύλες που διέρχονται από το z_0 κατά τη σταθερή προσανατολ. κυρτή γωνία $\mathrm{Arg} f'(z_0)$

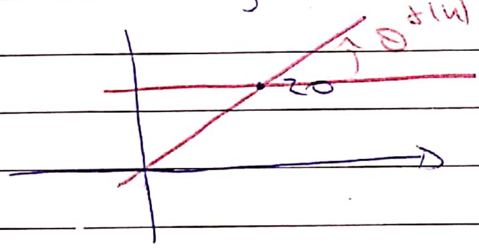
[Το βασικό είναι ότι όλες οι γ στρίβουν κατά την ίδια γωνία $\mathrm{Arg} f'(z_0)$]

Όπως πριν:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)}{|(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)|}}{\dfrac{\gamma(h)-\gamma(0)}{|\gamma(h)-\gamma(0)|}} = \dots = e^{i\mathrm{Arg} f'(z_0)}$$

(*) δηλ. το όριο αυτό είναι ανεξ/το από το γ

Ειδική περίπτωση: καμπύλες $\gamma(h) = z_0 + he^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$
με $\gamma'(h) = e^{i\theta}$ $(=1) \neq 0$



(*) $\overset{\text{σύμβαση}}{\underset{\text{Ευγραση}}{\iff}}$ η f διατηρεί τις γωνίες (με τον προσανατολισμό στο z_0)

με $\gamma'(h) = e^{i\theta}$

Για τέτοιες ειδικές καμπύλες έχουμε [αν $f'(z_0) \neq 0$]

$$\lim_{h\to 0^+} e^{-i\theta}\frac{f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)}{|f(z_0+he^{i\theta})-f(z_0)|} = e^{i\mathrm{Arg} f'(z_0)} \quad (*)$$

δηλ. το όριο υπάρχει και είναι ανεξ/το του $\theta\in\mathbb{R}$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο: Αν η $f: D\to\mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-διαφ/μη στο $z_0\in D$ με μη-μηδενική παράγωγο και το όριο (*) $\exists$ $\forall\, \theta\in\mathbb{R}$ και είναι ανεξ/το από το θ, τότε η

f είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη στο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$

Αν f $\mathbb{R}$-διαφ. στο z_0 με μη-μηδενική παράγωγο $d \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} : \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0) - \mu(\bar{z}-\bar{z_0})}{|z-z_0|} = 0$

$\theta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lambda + \mu e^{-2i\theta} \neq 0$ [τέτοια πάντα υπάρχουν, αφού αν -κατά τύχη- $\lambda = -\mu e^{-2i\theta_0}$, τότε για $\theta \neq \theta_0$ (κοντά στο θ_0) $\Leftrightarrow \theta - \theta_0 \neq 0$ θα έχουμε $\lambda \neq \underbrace{-\mu e^{-2i\theta_0} e^{-2i(\theta-\theta_0)}}_{= -\mu e^{-2i\theta}}$ και $2\theta, 2\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ $(\Rightarrow 2\theta - 2\theta_0 \in (-2\pi, 2\pi))$]

Με $z(h) = z_0 + he^{i\theta}$ έχουμε: $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(z_0+he^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0+he^{i\theta}) - f(z_0)|} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} e^{-i\theta} \dfrac{\lambda \cancel{h} e^{i\theta} + \mu h e^{-i\theta} + o(\cancel{h})^{1}}{|\lambda \cancel{h} e^{i\theta} + \mu \cancel{h} e^{-i\theta} + o(\cancel{h})^{1}|} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \underbrace{e^{-i\theta} e^{i\theta}}_{=1} \dfrac{\lambda + \mu e^{-i2\theta} + o(1)}{|e^{i\theta}| \, |\lambda + \mu e^{-2i\theta} + o(1)|} = \dfrac{\lambda + \mu e^{-i2\theta}}{|\lambda + \mu e^{-i2\theta}|}$

$\lambda + \mu e^{-i2\theta} \neq 0$

Αυτό είναι το όριο * για το οποίο υποθέσαμε το $\dfrac{\lambda + \mu e^{-i2\theta}}{|\lambda + \mu e^{-i2\theta}|}$ ανεξάρτητο του $\theta \Rightarrow \mu = 0 \xRightarrow[\text{προηγ.}]{\text{βλ.}}$ η $\mathbb{R}$-διαφ/μη f με $\mathbb{R}$-παράγωγο

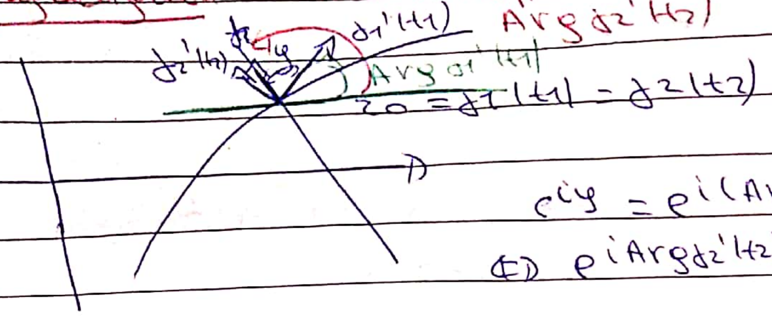
$df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη με $f'(z_0) =$

$= df_{z_0}(z) = \lambda z$

[Άσκηση βλ. υποσημείωση 40, σελ 98, Sug]

Τι σημαίνουν όλα αυτά; Γιατί λέμε η f διατηρεί τις γωνίες (μαζί με τον προσανατολισμό) στο z_0?

Παράρτημα 3.3.4 Σημ.

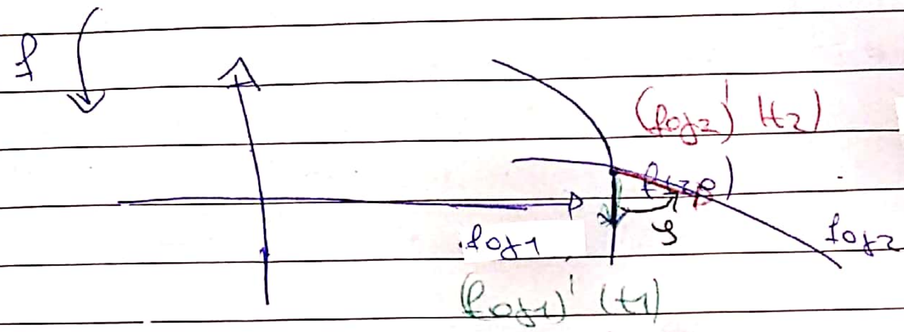


$$\varphi=\operatorname{Arg}\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}$$

Γιατί:

$$e^{i\varphi}=e^{i(\operatorname{Arg}\gamma_2'(t_2)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(t_1))} \iff$$

$$\iff e^{i\operatorname{Arg}\gamma_2'(t_2)}=e^{i\operatorname{Arg}\gamma_1'(t_1)}\,e^{i\varphi}\ ]$$



Η f διατηρεί τις γωνίες (με προσανατ.) στο z_0 $\iff$

$$\iff \operatorname{Arg}\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}=\operatorname{Arg}\frac{(f\circ\gamma_2)'(t_2)}{(f\circ\gamma_1)'(t_1)} \iff e^{i(\operatorname{Arg}\gamma_2'(t_2)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(t_1))}=$$

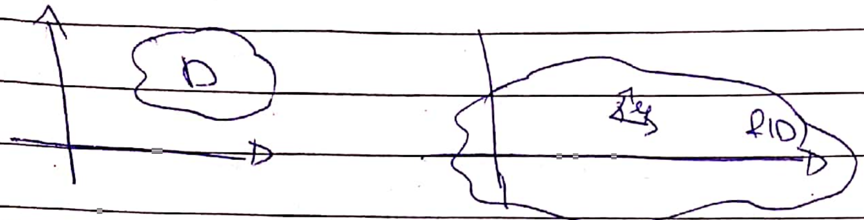
$$=e^{i(\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_2)'(t_2)-\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(t_1))} \iff e^{i(\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_2)'(t_2)-\operatorname{Arg}\gamma_2'(t_2))}=$$

$$=e^{i(\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(t_1)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(t_1))} \iff e^{i\operatorname{Arg}\frac{(f\circ\gamma_2)'(t_2)}{\gamma_2'(t_2)}}=$$

$$=e^{i\operatorname{Arg}\frac{(f\circ\gamma_1)'(t_1)}{\gamma_1'(t_1)}}$$

Η τελευταία έκφραση λέει ότι η καμπύλη γ_1 έστριψε κατά την απεικόνιση f κατά την ίδια (με προσανατ.) γωνία, όπως και η καμπύλη γ_2 [δηλ. συγκρίνουμε τη διαφορά γωνίας μεταξύ $(f\circ\gamma_2)'(t_2)$ και $\gamma_2'(t_2)$ με $(f\circ\gamma_1)'(t_1)$ και $\gamma_1'(t_1)$ και διαπιστώνουμε ότι είναι ίδιες $\forall\ \gamma$

Ορισμός: Σύμμορφη απεικόνιση (ή σύμμορφη) ονομάζεται μια ολόμορφη συνάρτηση $f: D \to \mathbb{C}$ (όπου $D\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό) με: $f'(z)\neq 0\ \forall z\in D$. Αυτή έχει την ιδιότητα κατά την απεικόνιση του D στο $f(D)$ να διατηρεί τις γωνίες (και τον προσανατ.) μεταξύ καμπυλών



Με άλλα λόγια: ένα διαφ/μο διαν. πεδίο $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ στο $\mathbb{R}^2$ διατηρεί τις γωνίες μεταξύ καμπυλών στον $\mathbb{R}^2$ μαζί με τον προσανατ. τους μόνο αν αυτό αντιστοιχεί σε μία μιγαδικά διαφ/μη f με $f' \neq 0$. Αυτό, βλ. παραδ., είναι σημαντικό για την ευκολότερη μαθηματική μελέτη συμπεριφοράς αντικειμένων, π.χ. στην αεροδυναμική, βλ. μετασχηματισμός Joukowski

Άσκηση για το σπίτι: A.62

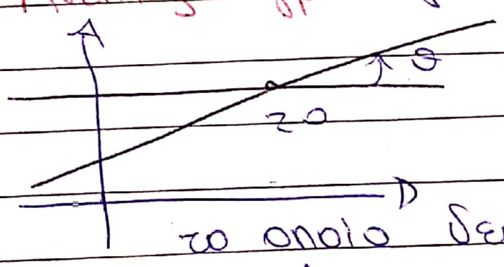
Αυτό σχετίζεται άμεσα αλλά διαφορετικό με το ότι το $f'(z_0) = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, δηλ. το $\mathbb{C}$-διαφορικό $z \mapsto f'(z_0)z = \lambda z$, αντιστοιχεί στο διαφορικό του αντίστοιχου διαν. πεδίου

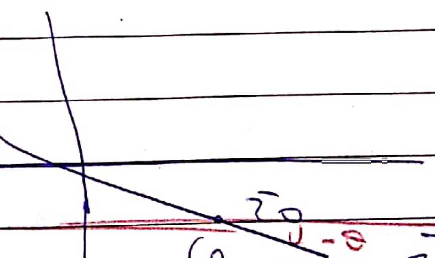
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= |\lambda| \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{|\lambda|} & -\frac{\lambda_2}{|\lambda|} \\ \frac{\lambda_2}{|\lambda|} & \frac{\lambda_1}{|\lambda|} \end{pmatrix} = (*)$$

$$(*) = |\lambda| \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{ορθογώνιος πίνακας} \to \text{στροφή κατά } \theta}$$

Αντιπαράδειγμα: $f(h) = z_0 + he^{i\theta}$





$(f\circ g)(h) = z_0 + he^{-i\theta}$

το οποίο δεν μας ενδιαφέρει αφού $\exists\ df_{z_0}(z) = \bar{z}$ αλλά $\nexists$
$f'(z_0) \notin \mathbb{C}$